

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se llama **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas a dos ecuaciones que involucran dos incógnitas de exponente 1.

Para comenzar el estudio de los sistemas de ecuaciones, comenzaremos resolviendo las siguientes situaciones:

- ¿Existen dos números enteros que cumplan que su suma es 36 y su diferencia o resta es 4?

- La familia Castro decidió realizar una ampliación de su casa, por lo que todas las semanas debe comprar materiales de construcción. La semana pasada compró 3 bolsas de cemento y 2 bolsas de cal viva por \$400. Esta semana pagó \$250 por 1 bolsa de cemento y 3 bolsas de cal viva. Asumiendo que no hubo variación en los precios, ¿cuál es el costo de cada producto?



- El perímetro de un campo rectangular es 100 m y se sabe que la diferencia entre la base y la altura es 10 m. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho campo?



De las tres actividades tomaremos la tercera y veremos juntos cómo es posible utilizar las ecuaciones como una estrategia de resolución.

Sabemos que el campo es rectangular y que deseamos conocer las longitudes de su ancho y su largo. Como son dos números desconocidos diferentes, debemos representarlos con dos letras, por ejemplo x e y .



Sabiendo que su perímetro es 100 m, podemos plantear la ecuación $2x + 2y = 100$

Soluciones posibles

x	y	$2x + 2y = 100$
10	40	$2 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 100$
20	30	$2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 100$
30	20	$2 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 100$
35	15	$2 \cdot 35 + 2 \cdot 15 = 100$

Sabiendo que diferencia entre la base y la altura es 10 m, podemos plantear la ecuación $x - y = 10$

Soluciones posibles

x	y	$x - y = 10$
50	40	$50 - 40 = 10$
40	30	$40 - 30 = 10$
30	20	$30 - 20 = 10$
35	25	$35 - 25 = 10$

Resolver un sistema de ecuaciones de este tipo es encontrar, cuando existan, el o los valores de las incógnitas que verifican las dos ecuaciones simultáneamente

Para indicar que dos ecuaciones forman un sistema de ecuaciones se las encierra con una llave de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

En la actividad que hallamos las dimensiones del campo, luego de plantear las dos ecuaciones, fuimos probando posibles soluciones para cada ecuación hasta hallar aquella que compartían las dos ecuaciones. Claramente, ésta no es una estrategia muy eficiente a la hora de resolver un problema.

Métodos de resolución

A continuación, estudiaremos dos métodos de resolución que nos permitirán hallar, cuando existan, las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Existen otros métodos además de los que estudiaremos aquí que pueden ser hallados en cualquier libro de texto que desarrolle el tema o explicado en tutoriales en internet.

La solución de un sistema de ecuaciones no depende del método utilizado, ni de la incógnita que se desee despejar inicialmente.

Método de igualación

Consideremos nuevamente el sistema de ecuaciones propuesto para hallar las dimensiones del campo rectangular.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.

<p><i>Primera ecuación</i> $2x + 2y = 100$ $2x + 2y - 2y = 100 - 2y$ $2x = 100 - 2y$ $2x : 2 = (100 - 2y) : 2$ $x = 50 - y$</p>	<p><i>Segunda ecuación</i> $x - y = 10$ $x - y + y = 10 + y$ $x = 10 + y$</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Despejar tal incógnita

$$\begin{aligned} 50 - y + y &= 10 + y + y \\ 50 &= 10 + 2y \\ 50 - 10 &= 10 + 2y - 10 \\ 40 &= 2y \\ 40 : 2 &= 2y : 2 \\ 20 &= y \end{aligned}$$

Igualar las expresiones obtenidas, de lo que se obtiene una ecuación con una sola incógnita.

$$50 - y = 10 + y$$

Reemplazar el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.

$$\begin{aligned} x &= 50 - y \\ x &= 50 - 20 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

Verificar la solución encontrada, reemplazando las incógnitas por sus valores en las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} \text{Ecuación 1} \\ 2 \cdot 30 + 2 \cdot 20 &= 100 \\ 60 + 40 &= 100 \\ \text{Ecuación 2} \\ 30 - 20 &= 10 \end{aligned}$$

Actividad 1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a.
$$\begin{cases} 2x - 4y = -7 \\ x + 8y = -1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} -3x - 4y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 5m - 3n = 22 \\ 2m + n = 0 \end{cases}$$

Actividad 2. Verifica en cada caso, si el par de valores indicado es solución del sistema. En caso contrario, encuentra la solución.

a.
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Solución: $x = 3$, $y = 1$

b.
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = -20 \\ 9x + y = 15 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$, $y = -3$

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = -20 \\ 9x + y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 2y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (-x - 9) = 4y \\ x + 5y = -36 \end{cases}$$

A continuación, estudiaremos otro método de resolución, llamado **método gráfico**, que posee un fuerte vínculo con lo aprendido sobre función lineal, por lo que deberemos recordar cómo se representa gráficamente una recta a partir de su fórmula.

Consideremos nuevamente el sistema de ecuaciones usado para hallar las dimensiones del rectángulo propuesto al comienzo de esta sección.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones

Primera ecuación

$$2x + 2y = 100$$

$$2x + 2y - 2x = 100 - 2x$$

$$2y = 100 - 2x$$

$$2y : 2 = (100 - 2x) : 2$$

$$y = 50 - x$$



Es conveniente en este método representar las incógnitas con las letras x e y para continuar con la misma notación que aprendimos en función lineal y despejar y , para facilitar el trazado del gráfico.

Segunda ecuación

$$x - y = 10$$

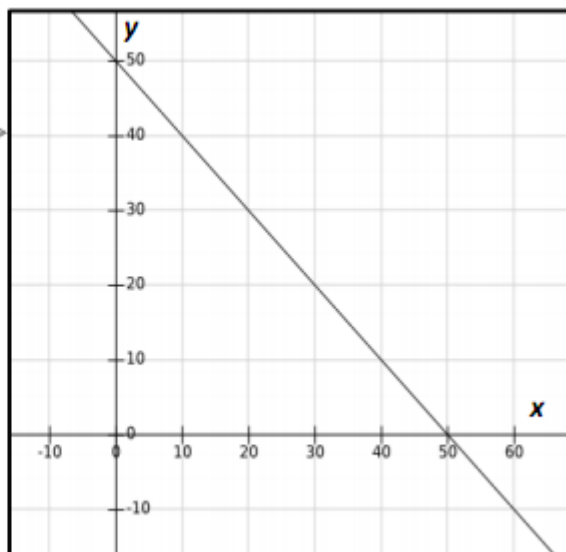
$$x - y + y = 10 + y$$

$$x - 10 = 10 + y - 10$$

$$x - 10 = y$$

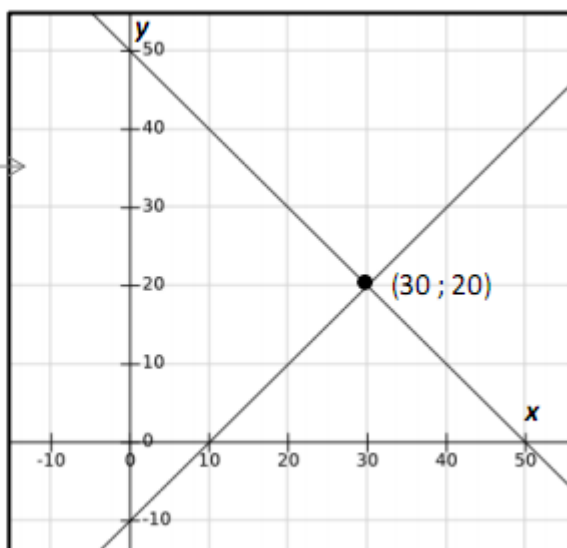
Representar gráficamente la recta $y = 50 - x$

Cada uno de los puntos de dicha recta cumplen que el valor de y se obtiene calculando $50 - x$



En el mismo sistema, representar gráficamente la recta $y = x - 10$

Cada uno de los puntos de dicha recta cumplen que el valor de y se obtiene calculando $x - 10$



Observamos en el gráfico que las dos rectas se cortan en un punto. Debido a que las coordenadas de dicho punto verifican las dos ecuaciones, éstas serán la solución al sistema propuesto. Por lo tanto, $x = 30$ e $y = 20$, como obtuvimos empleando los dos métodos aprendidos anteriormente.

Actividad 1. Halla gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a.
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1 \\ x + y = -5 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4y + 3x = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 5x = 12 + 4y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Planteo de sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones estudiados pueden ser pensados como una herramienta para resolver situaciones que involucran dos incógnitas. Veremos ahora algunas cuestiones que debemos tener en cuenta a la hora de plantear un sistema.

EJERCITACION

Actividad 4. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones para cada una de las siguientes situaciones.

- a. La suma de un número y el triple de otro es 11. Si la diferencia entre el triple del primero y el doble del segundo es -22, ¿cuáles son esos números?
- b. Paula compró en un negocio una jarra y una fuente y pagó por estos productos \$150. Si el precio de la fuente fue \$ 30 más que el precio de la jarra, ¿Cuál fue el costo de cada producto?
- c. Marcos, mientras esperaba que lo atendiera el vendedor de una bicicletería, observó que en el total de bicicletas y triciclos había 50 manubrios y 127 ruedas. ¿Cuántos triciclos había en el local?
- d. La suma de dos números es 50. Si la suma entre el doble del primero y el triple del segundo es 120, ¿cuáles son dichos números?
- e. En un rectángulo, su perímetro es 50 cm y la suma de un largo y el doble del ancho es 30 cm. ¿Cuáles son las medidas del largo y el ancho de dicho rectángulo?
- f. Con los 34 billetes de 2 y 5 pesos que tenía ahorrados, María contó que tenía \$143. ¿Cuántos billetes de cada valor tenía?
- g. El precio de las entradas a un espectáculo es \$ 50 para los adultos y \$ 30 para los niños menores a 10 años. Ayer asistieron 60 personas y la recaudación fue \$ 2100. ¿Cuántos niños asistieron?